

(قسمت اول)

دکتر رضا قلاح مقدم

عضو هیئت علمی  
دانشگاه فرهنگیان تهران

# ولفرام آلفا و هوش مصنوعی حریصان خرید و فروش کسرهای واحد،

در حساب عددهای صحیح، عددهای معیار مضرب‌های ۱۰ هستند. یک مسئله ممکن است یافتن یک عدد صحیح بین دو مضرب متوالی عدد ۱۰ باشد. مثلاً داریم:  $30 < 27 < 20$ . به همین ترتیب کسرهای واحد به عنوان کسرهای معیار در نظر گرفته می‌شوند. یک مسئله مشابه قرار دادن یک کسر مثلاً  $\frac{5}{12}$  بین دو کسر متوالی واحد است. می‌توان دید که چنین می‌شود:  $\frac{5}{12} > \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$  و  $\frac{5}{12} < \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ . بنابراین می‌توان نوشت:  $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$ . قرار دادن  $\frac{26}{69}$  بین دو کسر واحد دشوارتر است. برای انجام این کار ممکن است در نظر بگیریم:  $\frac{26}{69} < \frac{26}{52} < \frac{1}{2}$  و  $\frac{26}{69} > \frac{26}{78} = \frac{1}{3}$ . با جای‌گذاری  $\frac{26}{69}$  بین دو مضرب متوالی ۲۶ استفاده از مفهوم کسرهای معادل به دست می‌آوریم:

$$2 \times 26 < 69 < 3 \times 26$$

این یک ایده بزرگ در ریاضیات است که یک تناسب عددی، غیربدهی، در میان مقادیرهای نوشته شده متفاوت، آن را آشکار می‌کند. بنابراین:  $\frac{1}{3} < \frac{26}{69} < \frac{1}{2}$ . گاهی محاسبه تفاوت بین یک کسر و بزرگ‌ترین کسر

معیار کوچک‌تر از آن مهم است:  

$$\frac{26}{69} - \frac{1}{3} = \frac{26 - 23}{69} = \frac{3}{69} = \frac{1}{23}$$
 پس:  $\frac{26}{69} = \frac{1}{3} + \frac{1}{23}$

امکان ایجاد تطابق بین نمادهای متفاوت ریاضی، برای مثال کسرها، یک ایده بزرگ در ریاضیات است. آنچه در این ایده نهفته، این مطلب است که یک کسر هم‌زمان هم یک عدد است و هم یک عمل. عمل قابل شناسایی است، ولی هنوز تکمیل نشده است.

بحث در مورد مسئله‌های مربوط به شغل‌ها یا مسئله‌های تعیین فاصله‌ها می‌تواند به بحث در مورد موضوع نمایش یک کسر واحد به صورت مجموع دو کسر واحد دیگر بینجامد.

## ◆ نمایش کسر واحد

### به صورت مجموع دو کسر واحد دیگر

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

○ چند مستطیل با طول ضلع صحیح با مساحتی  $n$  برابر نصف محیط وجود دارد؟ ( $n$  عددی ثابت، دلخواه و طبیعی است)

اگر  $x$  و  $y$  طول و عرض چنین مستطیلی باشند ( $x \geq y$ )، آنگاه:  $xy = n(x + y)$ . از تقسیم این معادله بر  $xy$  به دست

می‌آوریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n} \quad \text{معادله ۱:}$$

به این ترتیب مسئله یافتن مستطیل، به مسئله یافتن همه راه‌ها برای نمایش کسر واحد  $\frac{1}{n}$  به عنوان مجموع دو کسر واحد تبدیل می‌شود. در بسیاری از مسئله‌های دیگر می‌توان از معادله ۱ به عنوان یک مدل ریاضی استفاده کرد. برای مثال:

● اگر دو کارگر هنگام کار با هم، بتوانند یک کار معین را در  $n$  روز به پایان برسانند، ممکن است یکی از آن‌ها بخواهد بداند تعداد روزهایی که برای تکمیل این کار به صورت تک نفره طول می‌کشد، چقدر است؟ مسئله دیگری را می‌توان به این صورت فرمول‌بندی کرد:

● اگر دو وسیله نقلیه با سرعت‌های متفاوت اما ثابت به سمت یکدیگر حرکت کنند (یک حرکت یکنواخت) و در  $n$  ساعت به هم برسند، تعداد ساعت‌هایی را که برای هر یک از آن‌ها طول می‌کشد تا کل مسافت را طی کند، پیدا کنید.

تبدیل یک توصیف شفاهی به یک معادله، نابرابری یا سیستمی از آن‌ها، یک مهارت اساسی در مدل‌سازی ریاضی است. یعنی معادله ۱ را می‌توان به عنوان یک مدل ریاضی از موقعیت‌های متفاوت مشخص، از جمله هندسه، کار و مسائل مساحت در نظر گرفت. معادله ۱ را می‌توان به این شکل نوشت:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{n} - \frac{1}{x}$$

سپس با مخرج مشترک گرفتن از سمت راست تساوی خواهیم داشت:

$$y = \frac{nx}{x-n} = \frac{n(x-n)+n^2}{x-n} = n + \frac{n^2}{x-n}$$

با توجه به اینکه  $x > n$  (همان‌طور که از مسئله فاصله به دست می‌آید)، به تساوی زیر منجر می‌شود:

$$y = n + \frac{n^2}{x-n}$$

از آنجا که  $x$  و  $y$ ،  $x \geq y$  برابر طول و عرض مستطیلی با مساحت  $n$  برابر نصف محیط آن هستند، تعداد جواب‌های معادله ۱

منطبق بر تعداد مقسوم‌علیه‌های  $n^2$  در میان تفاضل  $x-n$  است؛ به طوری که:

$$2n < x < n(n+1)$$

آخرین نابرابری از این مشاهدات به دست می‌آید که کسر  $\frac{1}{n}$  را همیشه می‌توان به هر دو صورت مجموع دو کسر واحد  $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$  و یا به صورت مجموع دو کسر واحد با تفاوت ممکن بین مخرج آن‌ها، یعنی  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$  نشان داد.

به طوری که در آن کسر  $\frac{1}{n+1}$  بزرگ‌ترین کسر واحد کوچک‌تر از  $\frac{1}{n}$  است و بنابراین اختلاف  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$  کوچک‌ترین کسر ممکن را به نمایندگی از  $\frac{1}{n}$  به عنوان مجموع دو کسر واحد به دست می‌دهد. علاوه بر این نابرابری  $x \geq y$  نشان می‌دهد که محدوده مجهول‌های  $x$  و  $y$  به شرح زیر است:

$$2n \leq x \leq n(n+1)$$

$$n+1 \leq y \leq 2n$$


نابرابری فوق را می‌توان به صورت هندسی تفسیر کرد. حالت  $x=y=2n$  مربعی با کوچک‌ترین محیط و حالت‌های  $x=n(n+1)$  و  $y=n+1$  مستطیلی با بزرگ‌ترین محیط بین تمام مستطیل‌های مورد بحث را نتیجه می‌دهد.

این نابرابری بر نابرابری  $n \leq x-n \leq n^2$  دلالت دارد. از آنجا که  $n^2$  و  $n$  مقسوم‌علیه‌های بدیهی  $n^2$  هستند، باید همه مقسوم‌علیه‌های دیگر  $n^2$  را در بازه و محدوده  $n$  تا  $n^2$  پیدا کرد. توجه داشته باشید که اگر  $m$  به طوری که  $n < m < n^2$  را عادی می‌کند (به طوری که خارج قسمت تقسیم  $n^2$  بر  $m$  عددی صحیح و باقی‌مانده آن صفر شود). بنابراین در  $\frac{n^2}{m}$  هم  $n^2$  بر  $m$  بخش‌پذیر است و نابرابری  $n \leq m \leq n^2$  با معکوس کردن عبارت‌ها، جهت نامساوی‌ها را به این شکل تغییر می‌دهد:  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ .

با ضرب نامساوی اخیر در  $n^2$  خواهیم داشت:  $1 < \frac{n^2}{m} < n$ . یعنی هر مقسوم‌علیه غیربدیهی  $n^2$  در محدوده  $(n, n^2)$  معادلی در

محدوده  $(1, n)$  دارد. اگر  $n$  را دوباره به عنوان مقسوم‌علیه بدیهی  $n^2$  در نظر بگیریم، آنگاه تعداد همه مقسوم‌علیه‌های  $n^2$  در محدوده  $[n, n^2]$  برابر نصف مجموع یک و تعداد کل مقسوم‌علیه‌های  $n^2$  است. پس تعداد آن مقسوم‌علیه‌ها در محدوده  $[n, n^2]$  برابر است با:  $\frac{D(n^2)+1}{2}$ ؛ وقتی که  $D(n^2)$  تعداد کل مقسوم‌علیه‌های  $n^2$  است. در نهایت آخرین کسر نشان‌دهنده تعداد حالت‌هایی است که کسر واحد  $\frac{1}{n}$  را می‌توان به صورت مجموع دو کسر واحد نشان داد.

حال باید  $D(n^2)$  را پیدا کرد. توجه داشته باشید یک عدد مربع کامل صحیح همیشه دارای تعداد فرد مقسوم‌علیه است. در واقع اگر  $n$  را به صورت  $n = P_1^{r_1} \dots P_k^{r_k}$  تجزیه به عددهای اول و  $P_i$  عامل‌های اول آن بنویسیم، پس خواهیم داشت:  $n^2 = P_1^{2r_1} \dots P_k^{2r_k}$ . بنابراین طبق اصل ضرب  $(2r_1+1)(2r_2+1)\dots(2r_k+1)$  برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های  $n^2$  است؛ به طوری که هر عامل اول  $P_i$  را می‌توان به تعداد  $2r_i+1$  حالت با توان‌های در محدوده صفر تا  $2r_i$  انتخاب کرد. بنابراین  $\frac{(2r_1+1)(2r_2+1)\dots(2r_k+1)+1}{2}$  روش برای تقسیم کردن واحد  $\frac{1}{n}$  به مجموع دو کسر مشابه وجود دارد.

**مثال:** وقتی:  $n=3$ ، داریم:  $n^2=9$ . پس:  $r_1=1$  و  $r_2=0$  برای  $i > 1$  و داریم:  $\frac{(2r_1+1)+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$ . پس تعداد حالت‌هایی که کسر  $\frac{1}{3}$  را می‌توان به مجموع دو کسر واحد نوشت برابر است با ۲. در واقع  $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$  تنها حالت‌های نوشتن  $\frac{1}{3}$  به صورت مجموع دو کسر واحد هستند. 

#### منابع

۱. آبرامویچ، سرگی و کانل، مایکل ال؛ (۲۰۲۱). توسعه دانش عمیق در ریاضی دوره متوسطه. کتابی برای تدریس در عصر فناوری. اشپرینگر، مترجم: رضا فلاح مقدم.